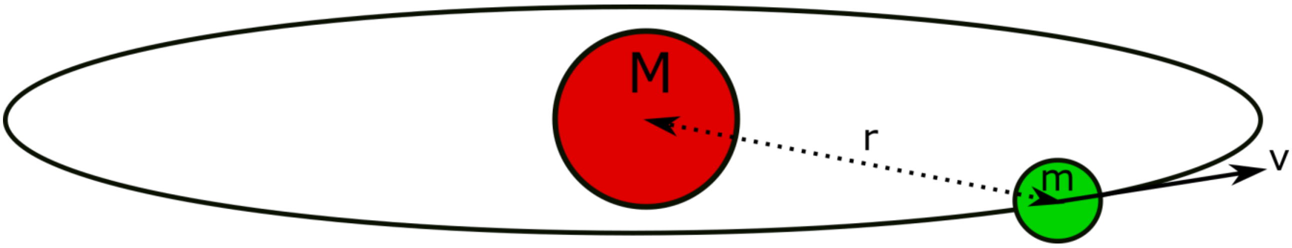
Viralsætningen for et legeme i jævn cirkelbevægelse i et gravitationsfelt



Figur 1: Et legeme med masse m i jævn cirkelbevægelse, med tangentiel hastighed v og med en baneradius på r, om et meget tungere legeme med masse M.

For et legeme som udfører jævn cirkelbevægelse i et gravitationsfelt gælder at

$$E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot E_{pot} \qquad (1)$$

Dette kan også udtrykkes som

$$E_{kin} = -\frac{1}{2} \cdot E_{pot} \qquad (2)$$

Ligning (1) og (2) er kendt under navnet *Viralsætningen*, der dog som den er udtrykt her, er mere simpel end sin generelle form som gælder for et helt system af partikler i et kraftfelt.

I det følgende udledes ligning (1) og (2).

Ét-legeme problem

Vi betragter en situation, hvor det ene legeme er så meget tungere end det andet, at vi kan se bort fra påvirkningen fra det lette legeme på det tunge. Vi har derfor det man kalder et ét-legeme problem og ikke et to-legeme problem, hvor begge masser er så store at deres gravitationelle påvirkning af hinanden begge er af betydning. Vi kan derfor med rimelighed antage, at det tunge legeme med massen M er ubevægeligt.

Newtons mekanik og Keplers 1. lov

Når et legeme med masse m bevæger sig i et (sfærisk symmetrisk) gravitationsfelt fra et meget tungere legeme med masse M, kan det ud fra Newtons gravitationslov og Newtons 2. lov vises, at det lette legeme med massen m, hvis dets mekaniske energi er negativ ($E_{mek} < 0$), vil gennemløbe en elliptisk bane med den tunge masse M i det ene brændpunkt. I det specielle (og i praksis teoretiske) tilfælde hvor ellipsens excentricitet er nul, vil banen være en cirkel med den tunge masse M i centrum. Med andre ord kan Keplers 1. lov udledes ud fra Newtons gravitationslov og Newtons 2. lov[1].

Keplers 1. lov betyder at f.eks. en satellit eller en rumstation kredser om jorden i en elliptisk bane. Det samme gælder for planeternes kredsløb om solen.

Jævn cirkelbevægelse

I forbindelse med planetbaner er det i mange tilfælde en rimelig tilnærmelse at betragte disse som cirkulære og ikke elliptiske, samt at betragte den tangentielle hastighed som konstant.

Vi ser derfor på den specielle situation, hvor legemet med massen m udfører en jævn cirkelbevægelse, med tangentiel hastighed v, om et meget tungere og ubevægeligt legeme med masse M og med en baneradius på r. Se Figur 1.

Legemet med massen m er påvirket at den gravitationelle kraft fra legemet med massen M, beskrevet ved Newtons gravitationslov

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \qquad (3)$$

Den potentielle energi i dette gravitationsfelt er givet ved

$$E_{pot} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r} \qquad (4)$$

Her indikerer minusset, at desto mindre afstanden r fra m til M er, desto mere negativ bliver den potentielle energi - altså desto hårdere bundet er m i gravitationsfeltet fra M.

Gøres r uendelig stor ses det at $\lim_{r\to\infty} E_{pot} = 0$ og dermed svarer $E_{pot} = 0$ til at m er fri af $M's$ gravitationsfelt.

Da farten af legemet med massen m antages konstant, er den kinetiske energi også en konstant og er givet ved

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \qquad (5)$$

Legemets mekaniske energi er derfor

$$E_{mek} = E_{pot} + E_{kin} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \qquad (6)$$

For jævn cirkelbevægelse gælder at $F_{res} = m \cdot \frac{v^2}{r}$, men da $F_{res} = F_G$ for det pågældende system må der gælde at

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \qquad (7)$$

Vi ganger nu ligning (7) igennem med $\frac{r}{2}$ og får

[1] Denne udledning kan f.eks. findes i bogen *Elements of Newtonian Mechanics* af J.M. Knudsen og P.G. Hjorth.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{2 \cdot r} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-G \cdot \frac{m \cdot M}{r}\right) = -\frac{1}{2} \cdot E_{pot} \qquad (8)$$

Fra ligning (8) ses det at

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} \cdot E_{pot} \qquad (9)$$

Altså følger det at

$$E_{mek} = E_{pot} + E_{kin} = E_{pot} - \frac{1}{2} \cdot E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot E_{pot} \qquad (10)$$

Da ligning (9) netop er ensbetydende med ligning (2) og ligning (10) er ensbetydende med ligning (1), er det hermed vist, at det for et legeme med masse m som udfører jævn cirkelbevægelse i et gravitationsfelt fra et meget tungere og ubevægeligt legeme med massen M gælder at

$$E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot E_{pot}$$

og

$$E_{kin} = -\frac{1}{2} \cdot E_{pot}$$

Bemærkning

Vi har i ovenstående antaget, at legemet med masse m udfører en jævn cirkelbevægelse. I praksis har de fleste planeter i kredsløb om solen eller måner i kredsløb om deres planet en bane-excentricitet så tæt på nul, at man begår en relativ lille fejl ved at tilnærme disse baner med cirkler og antage at planetens tangentielle hastighed er konstant (altså at antage jævn cirkelbevægelse). Der findes dog undtagelser, f.eks. planeten Merkur og dværgplaneten Pluto, der begge har en bane-excentricitet på over 0,2. Inden man tilnærmer elliptisk banebevægelse med jævn cirkelbevægelse bør man derfor undersøge banernes faktiske opførsel.