Bilag til artiklen ”to koblede spin $\frac{1}{2}$ partikler - med referencer til vektorer i rummet”, bragt i LMFK bladet nummer 4, 2022.

Bilag 1

$$\hat{S}_{x_{1,1}}^{\ a} = \langle \uparrow | \hat{S}_x^{\ a} | \uparrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \uparrow | \downarrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot 0 = 0$$

$$\hat{S}_{x_{1,2}}^{\ a} = \langle \uparrow | \hat{S}_x^{\ a} | \downarrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \uparrow | \uparrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot 1 = \frac{\hbar}{2}$$

$$\hat{S}_{x_{2,1}}^{\ a} = \langle \downarrow | \hat{S}_x^{\ a} | \uparrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \downarrow | \downarrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot 1 = \frac{\hbar}{2}$$

$$\hat{S}_{x_{2,2}}^{\ a} = \langle \downarrow | \hat{S}_x^{\ a} | \downarrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \downarrow | \uparrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot 0 = 0$$

Indsættes udregningerne ovenfor i matricens indgange fås netop $\hat{S}_x^a = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bilag 2

De kvadrerede Paulimatricer udregnes ved matrixmultiplikation:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$$\hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Dokumentet er hentet fra torstentranum.dk/fysik og knytter sig til artiklen *To koblede spin $\frac{1}{2}$ partikler - med referencer til vektorer i rummet*, bragt i LMFK-bladet nummer 4, 2022.

Bilag 3

Vi regner på egentilstande for $\hat{S}_z{}^{tot}$ og benytter som besluttet 2×2 notationen:

a) $\hat{S}_z{}^{tot}|\uparrow\uparrow\rangle = (\hat{S}_a{}^z + \hat{S}_b{}^z)|\uparrow\uparrow\rangle = \binom{1}{0}_b \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_a \binom{1}{0}_a + \binom{1}{0}_a \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_b \binom{1}{0}_b$

$$= 2\cdot\frac{\hbar}{2}\binom{1}{0}_a\binom{1}{0}_b = 2\cdot\frac{\hbar}{2}|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar|\uparrow\uparrow\rangle$$

Altså er $|\uparrow\uparrow\rangle$ egentilstand for $\hat{S}_z{}^{tot}$ med egenværdi $\hbar$.

b) $\hat{S}_z{}^{tot}\frac{|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = (\hat{S}_a{}^z + \hat{S}_b{}^z)\frac{|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_a{}^z(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + \hat{S}_b{}^z(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle))$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\binom{0}{1}_b \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_a \binom{1}{0}_a + \binom{1}{0}_b \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_a \binom{0}{1}_a + \binom{1}{0}_a \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_b \binom{0}{1}_b + \binom{0}{1}_a \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_b \binom{1}{0}_b\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\hbar}{2}\binom{1}{0}_a\binom{0}{1}_b - \frac{\hbar}{2}\binom{0}{1}_a\binom{1}{0}_b - \frac{\hbar}{2}\binom{1}{0}_a\binom{0}{1}_b + \frac{\hbar}{2}\binom{0}{1}_a\binom{1}{0}_b\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\hbar}{2}\left(\binom{1}{0}_a\binom{0}{1}_b + \binom{0}{1}_a\binom{1}{0}_b\right) - \frac{\hbar}{2}\left(\binom{1}{0}_a\binom{0}{1}_b + \binom{0}{1}_a\binom{1}{0}_b\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\left(\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2}\right)\left(\binom{1}{0}_a\binom{0}{1}_b + \binom{0}{1}_a\binom{1}{0}_b\right)\right)$$

$$0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\binom{1}{0}_a\binom{0}{1}_b + \binom{0}{1}_a\binom{1}{0}_b\right)$$

$$= 0\cdot\frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Altså er $\frac{|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ egentilstand for $\hat{S}_z{}^{tot}$ med egenværdi 0.

På tilsvarende vis kan det vises at $\frac{|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ er egentilstand for $\hat{S}_z{}^{tot}$ med egenværdi 0 og at $|\downarrow\downarrow\rangle$ er egentilstand for $\hat{S}_z{}^{tot}$ med egenværdi $-\hbar$.

Dokumentet er hentet fra torstentranum.dk/fysik og knytter sig til artiklen *To koblede spin $\frac{1}{2}$ partikler - med referencer til vektorer i rummet*, bragt i LMFK-bladet nummer 4, 2022.

Bilag 4 - bevis for artiklens sætning 3

Vi vil nu bevise sætning 3, lad derfor dens forudsætninger være opfyldt.

Det må nu gælde at

$$\hat{A}\,|\Psi_{AB}\rangle = \mathrm{E_A}|\Psi_{AB}\rangle$$

$$\hat{B}\,|\Psi_{AB}\rangle = \mathrm{E_B}|\Psi_{AB}\rangle$$

Den øverste ligning multipliceres nu med $\hat{B}$ mens den nederste multipliceres med $\hat{A}$, så vi får:

$$\hat{B}\hat{A}\,|\Psi_{AB}\rangle = \hat{B}\mathrm{E_A}|\Psi_{AB}\rangle$$

$$\hat{A}\,\hat{B}\,|\Psi_{AB}\rangle = \hat{A}\,\mathrm{E_B}|\Psi_{AB}\rangle$$

Ved at bruge konstantreglen for matrixmultiplikation, artiklens sætning 1 for en operators matrice, samt at $|\Psi_{AB}\rangle$ er egenvektor for både $\hat{A}$ og $\hat{B}$ fås

$$\hat{B}\hat{A}\,|\Psi_{AB}\rangle = \mathrm{E_A E_B}|\Psi_{AB}\rangle$$

$$\hat{A}\,\hat{B}\,|\Psi_{AB}\rangle = \mathrm{E_B E_A}|\Psi_{AB}\rangle$$

Endeligt kan de to ligninger trækkes fra hinanden så man får

$$(\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|\Psi_{AB}\rangle = 0$$

Hvis dette skal være korrekt i det tilfælde hvor det ikke blot er $|\Psi_{AB}\rangle$ som er lig en nulvektor,

må $\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ eller med andre ord $[\hat{A},\hat{B}] = 0$.

Artiklens sætning 3 er hermed bevist.

Bilag 5 - en ukoblet tilstand

Her følger et eksempel på en tilstand med forventningsværdi nul for operatoren $\hat{S}_a \cdot \hat{S}_b$, altså et eksempel på det som kaldes en ukoblet tilstand i Hilbertrummet udspændt af $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$.

Spinkoblings operatoren er givet ved

$$\hat{S}_a \cdot \hat{S}_b = \hat{S}_x^a \hat{S}_x^b + \hat{S}_y^a \hat{S}_y^b + \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b$$

Her er $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Vi ser på tilstanden $|\Psi_0\rangle$ bestående af to spin $\frac{1}{2}$ partikler $|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle_a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_b\right)$

$|\Psi_0\rangle$ er altså en tilstand hvor partikel a har spin op og partikel b er i en superposition af spin op og spin ned. Det bemærkes at partikel b's tilstand er en egentilstand for operatoren $\hat{S}_x$.

Udtrykt vha. lineær algebra fås:

$$|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle_a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_b\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_b\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_b$$

Vi får, hvor vi lader operatoren der hører til partikel a virke ind på vektoren der repræsenterer partikel a's tilstand og tilsvarende for partikel b:

$$\hat{S}_a \cdot \hat{S}_b\,|\Psi_0\rangle = (\hat{S}_x^a \hat{S}_x^b + \hat{S}_y^a \hat{S}_y^b + \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b)\,|\Psi_0\rangle = \left(\hat{S}_x^a \hat{S}_x^b + \hat{S}_y^a \hat{S}_y^b + \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_b$$

$$= \hat{S}_x^a \hat{S}_x^b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_b + \hat{S}_y^a \hat{S}_y^b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_b + \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_b$$

$$= \hat{S}_x^a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \hat{S}_x^b \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_b + \hat{S}_y^a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \hat{S}_y^b \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_b + \hat{S}_z^a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \hat{S}_z^b \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_b$$

Dokumentet er hentet fra torstentranum.dk/fysik og knytter sig til artiklen *To koblede spin $\frac{1}{2}$ partikler - med referencer til vektorer i rummet*, bragt i LMFK-bladet nummer 4, 2022.

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}_a \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_a \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}_b \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}_\mathrm{a} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_a \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}_b \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b$$

$$+ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_a \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_a \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_b \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_a \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}_a \begin{pmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}}\\\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_a \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b$$

Forventningsværdien beregnes som $\langle\Psi_0|\hat{S}_a \cdot \hat{S}_b|\Psi_0\rangle$. Herved forstås at de indre produkter tages mellem de samhørende tilstande for hver partikel efter at matricen har virket ind på ket'en. Hvis et af disse indre produkter giver nul, forsvinder hele ledet. Det indre produkt tages ved at gange de samhørende bra'er og ket'er sammen vha. reglerne for matrixmultiplikation.

$$\langle\Psi_0|\hat{S}_a \cdot \hat{S}_b|\Psi_0\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 (1 \quad 0)_a \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_b \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 (1 \quad 0)_a \cdot \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}_a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_b \begin{pmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}}\\\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b$$

$$+ \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 (1 \quad 0)_a \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_b \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}_b$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \cdot \left(0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0\right) = 0$$

Vi ser altså at forventningsværdien for tilstanden $|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle_a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_b\right)$ er lig 0, hvilket netop er det som menes med en ukoblet tilstand i forstanden at de to spin ikke påvirker hinanden. Vi skriver $\langle\Psi_0|\hat{S}_a \cdot \hat{S}_b|\Psi_0\rangle = 0$.

Dokumentet er hentet fra torstentranum.dk/fysik og knytter sig til artiklen *To koblede spin $\frac{1}{2}$ partikler - med referencer til vektorer i rummet*, bragt i LMFK-bladet nummer 4, 2022.

Bilag 6

OBS: Det skal bemærkes, at den lidt uhensigtsmæssige skrivemåde $\cos^2(\theta) + \sin(\theta)^2 = 1$, som står i artiklens afsnit 2.7 og som for at bevare konsistensen også er benyttet her bilag 6, blot betyder $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ eller $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$, hvilket da også er de typiske skrivemåder.

Tilsvarende betyder de enkeltstående udtryk i artiklens afsnit 2.7 som følger: $\cos^2(\theta) = (\cos(\theta))^2$ og $\sin(\theta)^2 = (\sin(\theta))^2$

Selve udregningerne til bilag 6 følger her:

$$
\begin{aligned}
|\uparrow'\rangle_a|\downarrow'\rangle_b - |\downarrow'\rangle_a|\uparrow'\rangle_b
&= (-\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,|\uparrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b + \sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,|\downarrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b \\
&\quad + \cos^2(\theta)|\uparrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b - \sin(\theta)^2\,|\downarrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b) \\
&\quad - (-\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,|\uparrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b + \sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,|\downarrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b \\
&\quad + \cos^2(\theta)|\downarrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b - \sin(\theta)^2\,|\uparrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & {\color{red}-\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,|\uparrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b} + {\color{blue}\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,|\downarrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b} + \cos^2(\theta)|\uparrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b - \sin(\theta)^2\,|\downarrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b \\
& + {\color{red}\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,|\uparrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b} {\color{blue}- \sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,|\downarrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b} \\
& - \cos^2(\theta)|\downarrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b + \sin(\theta)^2\,|\uparrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b
\end{aligned}
$$

$$= (\cos^2(\theta) + \sin(\theta)^2)|\uparrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b - (\cos^2(\theta) + \sin(\theta)^2)|\downarrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b$$

$$= |\uparrow\rangle_a|\downarrow\rangle_b - |\downarrow\rangle_a|\uparrow\rangle_b$$

Farvekoderne er brugt til at fremhæve led der går ud. I det sidste skridt benyttes at

$$\cos^2(\theta) + \sin(\theta)^2 = 1$$

Bilagene er slut